n/a

Ens: D. Strütt
Analyse I - (n/a)
15 novembre 2021
60 minutes

n/a

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 4 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

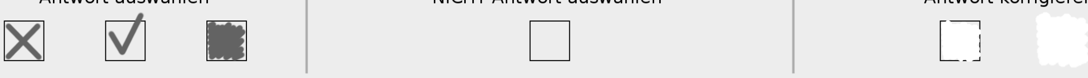
- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  $+3$ points si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  $+1$ point si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Read these guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

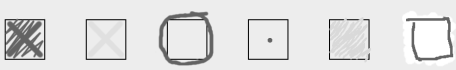
choisir une réponse | select an answer
Antwort auswählen

ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer
NICHT Antwort auswählen

Corriger une réponse | Correct an answer
Antwort korrigieren



ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte



Partie commune, 7 questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question [`QCM-complexes-A`] : Soit le nombre complexe $z = 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$. Alors :

☐ $|z^6| > 73$ ☐ $z^{14} \in \mathbb{R}$ ☐ $\mathrm{Re}(z^8) > 0$ ■ $\mathrm{Im}(z^{11}) < 0$

Question [`QCM-complexes-B`] : Soient les ensembles du plan complexe

$$A = \left\{z \in \mathbb{C} \colon z^2\left(|z| - 2\right) = 0\right\}, \qquad B = \{z \in \mathbb{C} \colon \mathrm{Re}\,(z) = 1\}.$$

Alors :

■ $A \cap B$ contient deux points
☐ $A \cap B$ est l'ensemble vide
☐ $A \cap B$ contient exactement un point
☐ $A \cap B$ contient tous les points d'une droite

Question [`QCM-induction-B1`] : Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^3$. Soit $f_1 = f$ et, pour tout $n \geq 2$, $f_n = f \circ f_{n-1}$. Alors pour tout $n \geq 1$:

■ $f_n(x) = x^{(3^n)}$ ☐ $f_n(x) = x^{(3n)}$ ☐ $f_n(x) = (3x)^n$ ☐ $f_n(x) = nx^3$

Question [`QCM-inf-sup-B`] : Soit A l'ensemble défini par $A = \left\{x \in \mathbb{R} \colon 0 < \mathrm{Arctg}\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{\pi}{4}\right\}$. Alors :

■ A n'est pas borné ☐ $A = \left]1, \frac{\pi}{2}\right[$
☐ $\mathrm{Inf}\, A = \frac{\pi}{2}$ ☐ $A =]0, 1[$

Question [`QCM-limite-B`] : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $a_n = \dfrac{(n+3)^{1/2} - n^{1/2}}{(n+1)^{-1/2}}$. Alors :

■ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2}$ ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

Question [`QCM-serie-parametre-B`] : Soit la série avec paramètre $b \in \mathbb{R}$ définie par :

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \left(b + \frac{1}{k}\right)^k$$

Alors s converge pour tout :

■ $b \in]-1, 1[$ ☐ $b \in]-1, 1]$ ☐ $b < 1$ ☐ $b \leq 1$

Question [`QCM-suites-convergence-B`] : Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $a_n = \dfrac{(5n+1)^n}{n^n 5^n}$. Alors :

■ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{5}}$ ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5$ ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Partie commune, 4 questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question [`TF-complexes-A`] : Pour tout $y \in \mathbb{R}$ donné, $y \neq 0$, l'équation $z^4 = \mathrm{i}\,y$ possède exactement quatre racines distinctes dans $\mathbb{C}$.

■ VRAI ☐ FAUX

Question [`TF-induction-suites-limites-B`] : Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites convergentes avec $b_n \neq 0$ pour tout $n \geq 0$. Alors la limite $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ existe.

☐ VRAI ■ FAUX

Question [`TF-inf-sup-A`] : Soit $A \subset \mathbb{R}$. Si $\operatorname{Inf} A \in A$ et $\operatorname{Sup} A \in A$, alors A est un intervalle fermé.

☐ VRAI ■ FAUX

Question [`TF-serie-B`] : Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout $n \geq 1$, $f(n) > n$. Alors la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$ converge.

☐ VRAI ■ FAUX

Troisème partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 12: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ■ 5 *Réservé au correcteur*

(a) Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite convergente. Démontrer que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \forall\, n \geq N, \quad |a_n - a_{n-3}| \leq \varepsilon$$

(b) Comme la réciproque de la question précédente est fausse, donner un exemple d'une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ divergente mais pour la quelle la propriété ci-dessus est vrai.

(a)
Variante 1
Le fait que la suite (a_n) converge implique qu'$\exists l \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N\ |a_n - l| \leq \varepsilon.$$

Soit donc l la limite de (a_n) et $\varepsilon > 0$ quelconque. Appliquant la définition de convergence ci-dessus avec $\varepsilon/2$ qui joue le rôle de ε, on obtient qu'$\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_1$,

$$|a_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Remarquons de plus que si $n \geq N_1 + 3$, alors, $n - 3 \geq N_1$ et donc

$$|a_{n-3} - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons maintenant $N = N_1 + 3$ ([1])
Alors, $\forall n \geq N$, on a

$$|a_n - a_{n-3}| = |a_n - l + l - a_{n-3}| \leq |a_n - l| + |l - a_{n-3}| \leq \underbrace{|a_n - l|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_{n-3} - l|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} \leq \varepsilon,$$

qui est le résultat voulu.

Variante 2
Posons

$$\lim_{n\to\infty} a_n :\ = l. \tag{1}$$

Alors,

$$\lim_{n\to\infty} a_{n-3} = l \tag{2}$$

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque.
Alors par définition de la limite (1) avec $\varepsilon/2$ qui joue le rôle de ε, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_1$,

$$|a_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et, par la définition de la limite (2) avec $\varepsilon/2$ qui joue le rôle de ε, $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_2$,

$$|a_{n-3} - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$.
Alors, $\forall n \geq N$, on a

$$|a_n - a_{n-3}| = |a_n - l + l - a_{n-3}| \leq |a_n - l| + |l - a_{n-3}| \leq \underbrace{|a_n - l|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_{n-3} - l|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} \leq \varepsilon,$$

qui est le résultat voulu.

Variante 3
Posons $\lim_{n\to\infty} a_n :\ = l$. Alors, $\lim_{n\to\infty} a_{n-3} = l$. De plus, par les propriétés des limites, on a alors

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - a_{n-3}) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} a_{n-3} = l - l = 0.$$

1. On aurait aussi pu poser $N = \max\{N_1, N_1 + 3\}$

Or, la définition de cette limite est précisément

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, \ |a_n - a_{n-3}| \leq \varepsilon.$$

Variante 4

Vu que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est convergente, elle est de Cauchy, i.e.,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n, m \geq N, \ |a_n - a_m| \leq \varepsilon.$$

Soit donc $\varepsilon > 0$ quelconque et $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq N_1$,

$$|a_n - a_m| \leq \varepsilon.$$

Posons $N = N_1 + 3$. Alors, pour tout $n \geq N$, on a $n \geq N_1 + 3 \geq N_1$ et $n - 3 \geq N - 3 = N_1$, i.e. $n, n-3 \geq N_1$ et donc

$$|a_n - a_{n-3}| \leq \varepsilon,$$

qui est le résultat voulu.

(b) Il existe une infinité d'exemples possible, en voilà trois :

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } n = 3k \\ 0 & \text{si } \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } n = 3k+1 \\ -1 & \text{si } \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } n = 3k+2 \end{cases}$$

ou

$$a_n = \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$